Многопараметрические спектральные задачи для полиномиальных и рациональных матриц

Хазанов В.Б.
к.ф.-м.н., доцент кафедры прикладной математики и математического моделирования СПбГМТУ

Работа посвящена изучению свойств многопараметрических полиномиальных и рациональных матриц, разработке методов решения спектральных задач для них и применению их для решения других задач алгебры.

Многопараметрические полиномиальные матрицы

Спектральная задача для многопараметрической полиномиальной $m\times n$ матрицы $F(\boldsymbol{\lambda}) = F(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q)$: связана с задачей нахождения нетривиальных решений уравнения

$$F(\boldsymbol{\lambda})\,\boldsymbol{x} = \mathbf{0},\ \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}.$$

Первый вид нетривиальных решений – это рациональные (полиномиальные) векторы $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\lambda})$, удовлетворяющие уравнению при любых значениях мультипараметра $\boldsymbol{\lambda}$:

$$F(\boldsymbol{\lambda})\,\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{0},\ \boldsymbol{x}(\boldsymbol{\lambda}) \in C^n(\boldsymbol{\lambda})\backslash\{\mathbf{0}\}.$$

Совокупность таких векторов образует правое нуль-пространство $N_c(\boldsymbol{\lambda}) \equiv \ker F(\boldsymbol{\lambda})$ матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$ размерности $\dim N_c[F] = n-\rho$. Полиномиальный вектор $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\lambda}) \in N_c(\boldsymbol{\lambda})$ называется правым *полиномиальным решением* матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$.

Второй вид нетривиальных решений уравнения – это отвечающий точке $\boldsymbol{\lambda}^*$ вектор $\boldsymbol{x}^* \in C^n$, который удовлетворяет уравнению при фиксированном значении мультипараметра $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}^*$:

$$F(\boldsymbol{\lambda}^*)\,\boldsymbol{x}^* = \mathbf{0},\ \boldsymbol{x}^* \notin N_c(\boldsymbol{\lambda}^*).$$

Совокупность таких точек $\boldsymbol{\lambda}^* \in C^q$, называется *конечным спектром* $\sigma[F]$ матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$, а вектор $\boldsymbol{x}^*$ соответствующим ей правым *собственным вектором*. Конечный спектр $\sigma[F]$ q-параметрической полиномиальной $m\times n$ матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$ ранга ρ определяется как совокупность решений системы нелинейных алгебраических уравнений, левые части которых – всевозможные миноры порядка ρ. *Регулярная* $\sigma_r[F]$ и *сингулярная* $\sigma_s[F]$ *части спектра* определяются соответственно (q–1)-мерными решениями и (q–k)-мерными решениями (при $k > 1$). НОД левых частей системы – *характеристический полином* матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$, определяет $\sigma_r[F]$. Его нетривиальные делители назовем *собственными полиномами* $F(\boldsymbol{\lambda})$.

Вводятся понятия *аналитической* (алгебраической) и *геометрическая кратностей* точки $\boldsymbol{\lambda}^* \in \sigma[F]$. Для кратных точек спектра вводятся понятия *жордановых полурешеток векторов* и *порождающего корневого вектора* (обобщающие соответствующие понятия для однопараметрических матриц). Для собственного полинома вводится понятие *порождающего собственного вектора*.

Определение спектральных характеристик в бесконечно удаленных точках основано на переходе от аффинного пространства C^q к проективному пространству $C\Pi^q$: от многопараметрической полиномиальной матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$ степени s будем переходить к однородной полиномиальной матрице: $F^{\pi}(\boldsymbol{\lambda}) := \lambda_0^s\, F(\lambda_1/\lambda_0, \ldots, \lambda_q/\lambda_0)$. Рассматривается также случай, когда только один из параметров λ матрицы $F(\boldsymbol{\lambda}) \equiv F(\lambda, \boldsymbol{\mu})$ является спектральным.

Установлены некоторые свойства спектральных характеристик многопараметрических полиномиальных матриц (в том числе, регулярного и сингулярного секторов и относящихся к ним характеристик). Обобщаются понятия понижающих подпространств, матричного решения и блочных спектральных характеристик. Установлены их свойства.

Предложен способ линеаризации многопараметрической полиномиальной матрицы, который осуществляется по каждому из скалярных параметров посредством перехода к сопровождающему пучку. Последовательный переход от полиномиальной матрицы к сопровождающим пучкам по всем ее спектральным параметрам позволяет получить в результате сопровождающий пучок постоянных матриц. Установлена связь спектральных характеристик полиномиальной матрицы и ее сопровождающего пучка.

Многопараметрические рациональные матрицы

Определения конечного спектра, кратностей точек спектра и соответствующих векторных характеристик, введенные для полиномиальной матрицы, могут быть распространены и на случай многопараметрической матрицы с любой функциональной зависимостью ее элементов от спектральных параметров, в том числе, и для рациональной матрицы. Однако бóльший интерес представляет собой обобщение на случай многопараметрической рациональной матрицы известных понятий, относящихся к особым точкам однопараметрической рациональной матрицы, характеризующих ее полюсно-нулевую структуру.

Для определения особых точек многопараметрической рациональной $m \times n$ матрицы $R(\boldsymbol{\lambda})$ ранга ρ рассмотрим совокупность всевозможных ее миноров порядка k:

$$R \begin{matrix} i_1, i_2, \ldots, i_k \\ j_1, j_2, \ldots, j_k \end{matrix} \equiv \frac{\eta_{\boldsymbol{ij}}^{(k)}(\boldsymbol{\lambda})}{\theta_{\boldsymbol{ij}}^{(k)}(\boldsymbol{\lambda})} = \frac{\varepsilon_{\boldsymbol{ij}}^{(k)}(\boldsymbol{\lambda})}{\psi(\boldsymbol{\lambda})}, \begin{matrix} 1 & i_1 & i_2 & \ldots & i_k & m, \\ 1 & j_1 & j_2 & \ldots & j_k & n, \end{matrix} \quad k=1,\ldots,\rho.$$

Здесь $\boldsymbol{i} = (i_1, i_2, \ldots, i_k)$ и $\boldsymbol{j} = (j_1, j_2, \ldots, j_k)$ – мультииндексы, которые определяют номера строк и столбцов соответствующего минора порядка k. Полиномы $\eta_{\boldsymbol{ij}}^{(k)}(\boldsymbol{\lambda})$ и $\theta_{\boldsymbol{ij}}^{(k)}(\boldsymbol{\lambda})$ являются попарно взаимно простыми, $\psi(\boldsymbol{\lambda})$ – НОК знаменателей всех дробей:

$$\psi(\boldsymbol{\lambda}) = \theta_{\boldsymbol{ij}}^{(k)}(\boldsymbol{\lambda})\, \omega_{\boldsymbol{ij}}^{(k)}(\boldsymbol{\lambda}),\ \varepsilon_{\boldsymbol{ij}}^{(k)}(\boldsymbol{\lambda}) = \eta_{\boldsymbol{ij}}^{(k)}(\boldsymbol{\lambda})\, \omega_{\boldsymbol{ij}}^{(k)}(\boldsymbol{\lambda}).$$

Конечными особыми точками рациональной $m \times n$ матрицы $R(\boldsymbol{\lambda})$ ранга ρ являются:

- *конечные полюса* $\omega_c[R]$, определяемые как совокупность нулей полинома $\psi(\boldsymbol{\lambda})$*:*
- *конечные нули* $\zeta_s[R]$, определяемые как совокупность нулей системы нелинейных алгебраических уравнений

$$\varepsilon_{\boldsymbol{ij}}^{(\rho)}(\boldsymbol{\lambda}) = 0, \begin{matrix} 1 & i_1 & i_2 & \ldots & i_\rho & m, \\ 1 & j_1 & j_2 & \ldots & j_\rho & n; \end{matrix}$$

- *конечные точи неопределенности* $\iota_c[R]$, определяемые как совокупность нулей системы нелинейных алгебраических уравнений

$$\begin{matrix} \varepsilon_{\boldsymbol{ij}}^{(k)}(\boldsymbol{\lambda}) & 0, & 1 & i_1 & i_2 & \ldots & i_k & m, \\ \psi(\boldsymbol{\lambda}) & 0, & 1 & j_1 & j_2 & \ldots & j_k & n, \end{matrix} \quad k=1,\ldots,\rho.$$

Доказана согласованность введенных характеристик с классическими определениями для однопараметрической рациональной матрицы. Особые точки на бесконечности определяются переходом от аффинного пространства C^q к проективному пространству $C\Pi^q$: $R\ \ (\boldsymbol{\lambda}) = R(\lambda_1/\lambda_0, \lambda_2/\lambda_0, \ldots, \lambda_q/\lambda_0)$.

Рассматриваются *полиномиальная реализация* $R(\boldsymbol{\lambda}) = S(\boldsymbol{\lambda})\ T^{\ 1}(\boldsymbol{\lambda})\ V(\boldsymbol{\lambda}) + W(\boldsymbol{\lambda})$ рациональной матрицы: и соответствующая ей *системная матрица*:

А также различные виды факторизации рациональной матрицы (в том числе, *несократимые факторизации*): $R(\boldsymbol{\lambda}) = S(\boldsymbol{\lambda})\ T^{\ 1}(\boldsymbol{\lambda})$, $R(\boldsymbol{\lambda}) = T^{\ 1}(\boldsymbol{\lambda})\ S(\boldsymbol{\lambda})$, $R(\boldsymbol{\lambda}) = S(\boldsymbol{\lambda})\ T^{\ 1}(\boldsymbol{\lambda})\ V(\boldsymbol{\lambda})$. Устанавливаются их свойства. Построение несократимых факторизаций рациональной матрицы позволяют сводить задачу нахождения особых точек к спектральным задачам для полиномиальных матриц.

"Связанные" многопараметрические задачи

"Слабо связанная" многопараметрическая спектральная задача для полиномиальных матриц представляет собой спектральную задачу для совокупности многопараметрических полиномиальных матриц, связанных общим мультипараметром $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q) \in C^q$:

$$F_i(\boldsymbol{\lambda})\, \boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{0},\ i=1,..,q,$$

где $F_i(\boldsymbol{\lambda})$ – полиномиальные $m_i \times n_i$ матрицы, $\boldsymbol{x}_i \in C^{n_i} \backslash \{0\}$, $\boldsymbol{y}_i \in C^{m_i} \backslash \{0\}$, $i=1,..,q$. На эти задачи переносятся определения спектральных характеристик; рассматриваются их свойства. Известна процедура сведения МПС-задачи для многопараметрических пучков постоянных матриц к совокупности обычных задач на собственные значения для коммутирующих матриц.

Прямые методы решения многопараметрических спектральных задач
(и других многопараметрических задач алгебры)

Предлагается некоторый подход (ΔW-q метод) к построению прямых методов решения задач алгебры с полиномиальной и рациональной зависимостью от q параметров ($q \geq 1$). В основе этого подхода лежат "ранговые" факторизации полиномиальной $m \times n$ матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$ ранга ρ:

$$F(\boldsymbol{\lambda})\, W(\boldsymbol{\lambda}) = [\Delta(\boldsymbol{\lambda}) \quad O_{m,n-\rho}], \qquad F(\boldsymbol{\lambda}) = \nabla(\boldsymbol{\lambda})\, V(\boldsymbol{\lambda}), \qquad F(\boldsymbol{\lambda}) = U(\boldsymbol{\lambda})\, T(\boldsymbol{\lambda})\, V(\boldsymbol{\lambda}).$$

Здесь $\nabla(\boldsymbol{\lambda})$, $U(\boldsymbol{\lambda})$ – полиномиальные $m \times \rho$ матрицы полного столбцового ранга, $V(\boldsymbol{\lambda})$ – полиномиальная $\rho \times n$ матрица полного строчного ранга, $W(\boldsymbol{\lambda})$, $T(\boldsymbol{\lambda})$ – регулярные полиномиальные матрицы порядка n и ρ соответственно. В основе ΔW-q метода лежит построение ранговых факторизаций полиномиальной матрицы, т.е. представление ее в виде произведения двух или более матриц полного ранга, совпадающего с рангом исходной матрицы. ΔW-q метод – комплекс взаимосвязанных методов, имеющих рекурсивную зависимость по числу параметров. Он состоит из метода ΔW-q разложения, ∇W-q метода, метода неполной относительной факторизации (НОФ-q) и АВ-q метода.

ΔW-q *разложение* q-параметрической полиномиальной $m \times n$ матрицы $F(\lambda,\boldsymbol{\mu}) = \sum_{k=0}^{s} A_k(\boldsymbol{\mu})\lambda^k$ ранга ρ определяется равенством вида

$$F(\lambda,\boldsymbol{\mu})\, W(\lambda,\boldsymbol{\mu}) = [\Delta(\lambda,\boldsymbol{\mu}) \quad O_{m,n-\rho}],\ W(\lambda,\boldsymbol{\mu}) \equiv [W_1(\lambda,\boldsymbol{\mu}) \quad W_0(\lambda,\boldsymbol{\mu})],$$

где $\Delta(\lambda,\boldsymbol{\mu})$ – полиномиальная $m \times \rho$ матрица, степень которой по параметру λ не превосходит аналогичной степени матрицы $F(\lambda,\boldsymbol{\mu})$, $W(\lambda,\boldsymbol{\mu})$ – унимодулярная по параметру λ матрица порядка n.

Левой неполной относительной факторизацией (НОФ) $m \times n$ матрицы $F(\lambda,\boldsymbol{\mu})$ полного строчного ранга по параметру λ называется представление вида

$$F(\lambda,\boldsymbol{\mu}) = \bar{P}(\boldsymbol{\mu})\ \bar{F}(\lambda,\boldsymbol{\mu}),$$

где $\bar{F}(\lambda,\boldsymbol{\mu})$ – полиномиальная $m \times n$ матрица, не имеющая левых матричных делителей, зависящих от мультипараметра $\boldsymbol{\mu}$, $\bar{P}(\boldsymbol{\mu})$ – регулярная полиномиальная матрица порядка m.

АВ-q *метод* предназначен для вычисления наследственных полиномов матрицы и исчерпывания их из спектра матрицы. АВ-q метод вычисляет несократимую факторизацию рациональной $m \times n$ матрицы $R(\lambda,\boldsymbol{\mu}) = \varphi^{-1}(\boldsymbol{\mu})\, F(\lambda,\boldsymbol{\mu})$ полного столбцового ранга, где $\varphi(\boldsymbol{\mu})$ – делитель из относительной факторизации характеристического полинома матрицы $F(\lambda,\boldsymbol{\mu})$.

Исследуются свойства ΔW-q метода и возможности применения его к решению многопараметрических задач алгебры (подобно однопараметрическому случаю[1]):

- задачи линейной алгебры (построение базисов подпространства и дополнительного подпространства, базисов суммы, пересечения и разности подпространств);
- спектральные задачи для полиномиальных матриц общего вида (построение базисов нуль-пространств из полиномиальных решений; вычисление "регулярной части", инвариантных полиномов, собственных и корневых векторов; исчерпывание спектральных характеристик; обратная задача на собственные значения; разложение на множители с заданными спектральными характеристиками);
- решение систем линейных алгебраических уравнений с полиномиальной матрицей (вычисление присоединенной, обратной и псевдообратной матриц);
- решение систем нелинейных алгебраических уравнений (сведение к спектральной задаче для пучка матриц или к решению нелинейного алгебраического уравнения);
- задачи со скалярными и матричными полиномами (вычисление НОД, НОК; разложение на множители);
- задачи для рациональных матриц общего вида (построение несократимых факторизаций, в том числе минимальных; построение базисов нуль-пространств; разделение полюсно-нулевой структуры)

---

[1] Кублановская В.Н., Хазанов В.Б. Численные методы решения параметрических задач алгебры. Часть 1. Однопараметрические задачи. – С.-Пб.: «Наука», 2004.

Итерационные методы решения многопараметрических спектральных задач (частичные задачи)

Рассматривается "несвязанная" задача для пучка постоянных матриц с линейными ограничениями в неоднородной и однородной постановках:

$$(A \quad \sum_{j=1}^{q} \lambda_j B_j)\boldsymbol{x} \quad \mathbf{0}, \qquad \widetilde{C}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x} \quad \widetilde{\boldsymbol{d}} \quad \mathbf{0}.$$

$$\sum_{j=0}^{q} \lambda_j B_j \boldsymbol{x} \quad \mathbf{0}, \qquad \widetilde{C}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x} \quad \widetilde{\boldsymbol{d}} \quad \mathbf{0}, \qquad \sum_{j=0}^{q} \left|\lambda_j\right|^2 \quad 1 \quad 0.$$

Для решения частичной задачи (вычисление собственного значения и соответствующего собственного вектора (с различными условиями нормировки) предложены:

- методы Ньютона, Чебышева, Хэлли, касательных гипербол,
- методы обратных итераций (с ньютоновской и с обобщенной поправками, с отношениями минимальных невязок),
- градиентные методы (для различных функционалов невязок).

Рассматривается обобщение предложенных методов для полиномиальных матриц.

Рассматривается "слабо связанная" задача для пучков постоянных матриц в неоднородной и однородной постановках:

$$(A_i \quad \sum_{j=1}^{q} \lambda_j B_{ij})\boldsymbol{x}_i \quad \mathbf{0},\ i \quad 1,\dots,q; \qquad \langle \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{w}_i \rangle \quad 1 \quad 0,\ i \quad 1,\dots,q.$$

$$\sum_{j=0}^{q} \lambda_j B_{ij} \boldsymbol{x}_i \quad \mathbf{0},\ i \quad 1,\dots,q, \qquad \langle \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{w}_i \rangle \quad 1,\ i \quad 1,\dots,q, \qquad \langle \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda} \rangle \quad 1.$$

Для решения частичной задачи (вычисление собственного значения и соответствующего собственного векторы с различными условиями нормировки) предложены:

- методы Ньютона, Чебышева, Хэлли, касательных гипербол,
- методы обратных итераций (с ньютоновской и с обобщенной поправками, с отношениями минимальных невязок),
- градиентные методы (для различных функционалов невязок).

Рассматривается обобщение предложенных методов для полиномиальных матриц. Предлагается обобщение метода В.Н.Кублановской (основанного на использовании нормализованного разложения постоянной матрицы) для решения частичной задачи для многопараметрических матриц с любой функциональной зависимостью ее элементов от спектральных параметров.

Хазанов Владимир Борисович

svi@smtu.ru
(8 812) 348 – 59 – 20 (дом.)