1. Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — вершины правильного n-угольника, вписанного в окружность с центром в точке O. Докажите, что $\overrightarrow{OA_1} + \ldots + \overrightarrow{OA_n} = \overrightarrow{0}$.

2. В тетраэдре $ABCD$ найдите точку M такую, что $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{0}$.

3. Пусть на плоскости имеется треугольник ABC и O — произвольная точка этой же плоскости. Докажите, что для любой точки M, принадлежащей данному треугольнику, справедливо равенство
$$\overrightarrow{OM} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC},$$
в котором $\alpha + \beta + \gamma = 1$ и $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$. Докажите также, что числа α, β, γ с указанными ограничениями определены однозначно.

4. Доказать, что для произвольных векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ выполняется равенство
$$[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] \;=\; (a, c)\,\vec{b} \,-\, (a, b)\,\vec{c}.$$

5. Доказать, что уравнение $[\vec{a}, \vec{x}] + [\vec{b}, \vec{x}] = [\vec{a}, \vec{b}]$ имеет решение для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найти все решения $\vec{x}$ для заданных $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

6. Доказать, что для линейной независимости функций $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ необходимо и достаточно, чтобы для некоторых чисел $x_1, \ldots, x_n$ матрица $[f_i(x_j)]_{ij=1}^n$ была обратимой.

7. Докажите, что линейное пространство $\mathbb{R}^n$ нельзя представить в виде объединения конечного числа множеств, каждое из которых не совпадает с $\mathbb{R}^n$ и является его подпространством.

8. Даны попарно различные числа $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ и известно, что для каких-то чисел $u_1, \ldots, u_n$ выполняются равенства
$$\prod_{k=1}^{n}(x - y_k)\sum_{j=1}\frac{u_j}{x - y_j} = 0 \quad \text{при} \quad x = x_1, \ldots, x_n.$$
Доказать, что $u_1 = \ldots = u_n = 0$. Вывести отсюда невырожденность $n \times n$-матрицы с элементами $1/(x_i - y_j)$.

9. Точки $v_0, v_1, \ldots, v_k$ в n-мерном пространстве называются *аффинно независимыми*, если векторы $v_1 - v_0, \ldots, v_k - v_0$ линейно независимы. Докажите, что в любой аффинно независимой системе с числом векторов $k+1$ можно выбрать линейно независимую подсистему с числом векторов k.

10. Доказать, что дробно-линейное отображение
$$z \;\mapsto\; a\frac{z - \bar{b}}{z - b}, \quad |a| = 1, \;\; \mathrm{Im}(b) < 0,$$
переводит точки (комплексные числа) верхней полуплоскости в точки единичного круга с центром в начале координат.

11. Доказать, что дробно-линейное отображение
$$z \;\mapsto\; a\frac{z - \bar{b}}{1 - zb}, \quad |a| = 1, \;\; |b| < 1,$$
переводит точки (комплексные числа) единичного круга с центром в начале координат в точки того же множества.

12. Доказать, что множество $\mathcal{T}$ отображений комплексной плоскости вида
$$(a) \quad z \mapsto \Phi(z) = a + bz \quad \text{или} \qquad (b) \quad z \mapsto \bar{\Phi}(z) = a + b\bar{z}, \quad \text{где} \quad a, b \in \mathbb{C}, \quad |b| = 1,$$
образует группу относительно композиции отображений. Доказать также, что никакое отображение вида (b) нельзя представить в виде композиции отображений вида (a).

13. Корень степени n из единицы называется *первообразным корнем*, если его степени дают все множество корней степени n из единицы. Пусть $z = \cos(2\pi/n) + \mathbf{i}\sin(2\pi/n)$. Доказать, что z^m, $m \geq 1$, является первообразным корнем степени n из единицы тогда и только тогда, когда числа m и n взаимно просты (наибольший общий делитель этих чисел равен 1).

14. Доказать, что $\sum\limits_{k=0}^{n-1}(x+\varepsilon^k y)^n = n(x^n+y^n)$, где $\varepsilon = \cos(2\pi/n) + \mathbf{i}\sin(2\pi/n)$.

15. Используя комплексные числа, доказать, что

$$(a)\quad x^{2n}-1 = (x^2-1)\prod_{k=1}^{n-1}(x^2-2x\cos(\pi k/n)+1); \qquad (b)\quad \prod_{k=0}^{n-1}\sin\left(\frac{\pi k}{2n}\right) = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}.$$

16. Пусть a и b — элементы кольца с единицей e. Докажите, что из обратимости элемента $e-ab$ в данном кольце вытекает обратимость элемента $e-ba$.

17. Пусть P — числовое поле и при этом $\mathbb{R}\subset P\subset\mathbb{C}$. Докажите, что $P=\mathbb{R}$ либо $P=\mathbb{C}$.

18. Найдите все поля, вложенные в поле $\mathbb{Q}$.

19. Докажите существование поля из четырех элементов.

20. Докажите линейную независимость чисел 1, $\sqrt[2]{2}$, $\sqrt[3]{2}$ над полем рациональных чисел.

21. Докажите линейную независимость функций $\sin x,\ \sin 2x,\ \ldots,\ \sin nx$ как элементов вещественного линейного пространства функций на произвольном заданном отрезке $[a,b]$.

22. Докажите, что группа целых чисел с операцией сложения не может быть аддитивной группой линейного пространства над каким-либо полем.

23. Докажите, что над любым полем существует бесконечно много неразложимых многочленов.

24. Докажите, что для многочленов над полем вычетов $\mathbb{Z}_p$ по простому модулю p имеет место равенство $(z-1)^p = z^p - 1$.

25. Докажите, что многочлены $f(x) = a_0 + \ldots + a_m x^m$, $a_m \neq 0$, и $g(x) = b_0 + \ldots + b_n x^n$, $b_n \neq 0$, имеют общий корень тогда и только тогда, когда $\det R(f,g) = 0$, где

$$R(f,g) \;=\; \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l}\\ \\ \\ \\ \end{array}\right. \end{array}\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_m & & & \\ & a_0 & a_1 & \ldots & a_m & & \\ & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ & & & a_0 & a_1 & \ldots & a_m \\ b_0 & b_1 & \ldots & b_n & & & \\ & b_0 & b_1 & \ldots & a_n & & \\ & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ & & & b_0 & b_1 & \ldots & b_n \end{bmatrix} \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l}\\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} n \text{ строк} \\ \left.\begin{array}{l}\\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} m \text{ строк} \end{array}$$

26. Докажите, что степень наибольшего общего делителя многочленов $f(x)$ степени m и $g(x)$ степени n равна $m+n-\mathrm{rank}R(f,g)$ (матрица $R(f,g)$ определена в предыдущей задаче).

27. Поле P — минимальное числовое поле, содержащее поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$ и $\sqrt[5]{2}$. Докажите, что поле P есть линейное пространство над полем $\mathbb{Q}$ и найдите его размерность.

28. Докажите, что квадратные корни $\sqrt{p_1},\ \ldots,\ \sqrt{p_n}$ из простых чисел $p_1 < \ldots < p_n$ линейно независимы как элементы линейного пространства вещественных чисел над полем рациональных чисел.

29. Доказать, что многочлен $f(x) = 1 + x + \ldots + x^n$ имеет n различных комплексных корней $z_1, \ldots, z_n$. Вычислить ньютонову сумму $s_k = z_1^k + \ldots + z_n^k$ при $k = 7$.

30. Пусть $z_1, \ldots, z_n$ — все корни (с учетом кратностей) многочлена $f(x)$ с рациональными коэффициентами. Доказать, что произведение $D = \prod\limits_{i\neq j}(z_i - z_j)$ является рациональным числом.

31. Дана симметричная матрица $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ с ненулевой суммой элементов главной диагонали. Доказать существование ортогональной матрицы $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ такой, что в матрице $Q^\top A Q$ все элементы главной диагонали одинаковы.