1. Пусть G — группа с единицей e. Докажите, что если $a^2 = e$ для любого $a \in G$, то группа G абелева.

2. Матрица A порядка n коммутирует со всеми диагональными матрицами порядка n: $AB = BA$ для всех диагональных матриц B порядка n. Докажите, что A — диагональная матрица с равными элементами на диагонали.[1]

3. Найти все подгруппы группы целых чисел $\mathbb{Z}$ относительно операции сложения чисел.

4. Докажите, что в любой бесконечной группе число различных подгрупп бесконечно.

5. В конечной группе G выбраны подгруппы H_1 и H_2 порядка n_1 и n_2, соответственно. Докажите, что число элементов в множестве $H_1H_2 = \{g \in G : g = h_1h_2, h_1 \in H_1, h_2 \in H_2\}$ равно n_1n_2/d, где d — число элементов в пересечении $H_1 \cap H_2$.

6. Какие смежные классы являются подгруппами?

7. Докажите, что любая абелева группа порядка pq, где p и q — различные простые числа, является циклической.

8. Докажите, что группа положительных рациональных чисел относительно умножения не изоморфна группе всех рациональных чисел с операцией сложения.

9. Найдите все группы, изоморфные любой своей неединичной подгруппе.

10. По заданным ненулевым числам $a_0, \ldots, a_{2n}$ составлены матрицы

$$A_k = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_k \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{k+1} \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_{k+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_k & a_{k+1} & a_{k+2} & \dots & a_{2k} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(k+1)\times(k+1)}, \qquad k = 1, \ldots, n,$$

при этом столбцы каждой из них линейно зависимы. Докажите, что существует число q такое, что $a_k = a_0 q^k,\ 0 \le k \le 2n$.

11. Для каждого n найдите все значения параметра a, при которых столбцы трехдиагональной матрицы

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & & & \\ -1 & a & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & a & 1 \\ & & & -1 & a \end{bmatrix}$$

порядка n линейно независимы.

12. Система линейных алгебраических уравнений вида

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_0 & a_1 \\ a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

имеет решение, причем $x_1 \ne 0$. Докажите, что столбцы матрицы коэффициентов линейно независимы.

13. Докажите, что все множество подстановок степени n можно упорядочить таким образом, что каждая следующая подстановка будет получаться из предыдущей путем умножения справа на некоторую транспозицию.

14. Докажите, что любую четную подстановку степени $n \ge 3$ можно представить в виде произведения циклов длины 3.

15. Докажите, что любая группа порядка n изоморфна некоторой подгруппе группы всех подстановок степени n.

[1] Такие матрицы называются *скалярными*.

16. Доказать, что любая подгруппа циклической группы является циклической.

17. Пусть H — множество всех элементов группы G, коммутирующих с любым элементом из G. Доказать, что H — нормальная подгруппа. Доказать также, что если фактор-группа G/H циклическая, то G является абелевой группой.

18. Пусть G — конечная группа. Элементы $a, b \in G$ называются *сопряженными*, если $b = hah^{-1}$ для некоторого $h \in G$. Докажите, что число элементов, сопряженных с a, является делителем порядка группы G.

19. Найти все обратимые матрицы A порядка n, для которых все элементы A и A^{-1} неотрицательны. Доказать, что множество всех таких матриц образует группу относительно операции умножения матриц.

20. Пусть A, B — произвольные матрицы порядка n; I и 0 — единичная и нулевая матрицы порядка n. Доказать, что
$$\begin{bmatrix} I & A & 0 \\ 0 & I & B \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I & -A & AB \\ 0 & I & -B \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}.$$
(Отсюда следует, что любой алгоритм вычисления обратной матрицы порядка n с числом операций $s(n)$ порождает алгоритм умножения матриц порядка n с числом операций $s(3n)$).

21. Является ли группа невырожденных верхних треугольных матриц нормальным делителем группы всех невырожденных матриц данного порядка?

22. Даны матрицы-столбцы $u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ и $A = u_1 v_1^\top + \ldots + u_k v_k^\top$. Доказать, что $\det A = 0$, если $k < n$.

23. Матрица B с определителем $b = \det B$ получена из A с определителем $a = \det A$ прибавлением числа $c \neq 0$ к каждому элементу. Найти суммы алгебраических дополнений всех элементов (подматриц порядка 1) для A и для B.

24. Докажите, что любую невырожденную матрицу можно сделать вырожденной, изменив лишь один из ее элементов.

25. Пусть I_n и I_m — единичные матрицы порядка n и m. Докажите, что для любых матриц A размеров $m \times n$ и B размеров $n \times m$ из обратимости $I_m - AB$ вытекает обратимость $I_n - BA$.

26. Докажите, что $\det(I + F) \neq 0$, если каждый элемент матрицы-возмущения F порядка n по модулю меньше $1/n$.

27. Путь A — $n \times n$-матрица ранга k, а B — любая невырожденная подматрица порядка k. Обозначим через R подматрицу размеров $k \times n$, состоящую из строк матрицы A, содержащих подматрицу B, а через C — подматрицу размеров $n \times k$, состоящую из столбцов, содержащих B. Доказать, что
$$A = CB^{-1}R.$$

28. Пусть A и B — матрицы ранга 1. Докажите, что если $AB = BA$, то ранг матрицы $A + B$ не больше 1.

29. Матрица A имеет r столбцов, а матрица B имеет r строк. Докажите, что
$$r \;\geq\; \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B) - \operatorname{rank}(AB).$$

30. Невырожденная матрица и обратная к ней разбиты на блоки одинаковых размеров:
$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}.$$
Доказать, что блок A_{11} невырожден тогда и только тогда, когда невырожден блок B_{22}.

31. Вычислить определитель матрицы порядка n с элементами $(x_i + y_j)^{n-1}$.