

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ВОПРОСЫ
по курсу "Алгебра и геометрия"(1 курс, 2 семестр)

1. Линейное пространство. Базис и размерность. (11.1-11.4, 16.1)
2. Изоморфизм линейных пространств. (12.1, 12.2)
3. Сумма и пересечение линейных пространств. (11.5, 11.6, 12.6)
4. Прямая сумма линейных пространств. (12.4, 12.5)
5. Нормированное пространство. Нормы Гельдера. (22.1-22.5)
6. Эквивалентность норм в конечномерном пространстве. (23.1-23.4)
7. Свойства нормированного пространства, связанные с компактностью единичной сферы. (23.3, 23.5, 23.7-23.8)
8. Задача о наилучшем приближении в конечномерном нормированном подпространстве. (23.6)
9. Скалярное произведение в вещественном и комплексном пространствах. Неравенство Коши–Буняковского–Шварца. (24.1-24.4)
10. Длина вектора. Тождество параллелограмма (критерий евклидовости нормы).
11. Скалярное произведение в ортонормированном базисе. Угол между векторами в евклидовом пространстве. Теорема Пифагора. (24.4, 24.5)
12. Матрица Грама. Критерий линейной независимости. (25.1)
13. Общий вид скалярного произведения в конечномерном унитарном (евклидовом) пространстве. (25.2)
14. Ортогональное дополнение множества. Ортогональная сумма подпространств. Перпендикуляр и ортогональная проекция. (24.7, 24.8, 25.3)
15. Ортонормированные базисы и унитарные (ортогональные) матрицы. Процесс ортогонализации Грама–Шмидта. (25.4-25.8)
16. Биортогональные базисы. (25.7)
17. Линейные многообразия и гиперплоскости. Гиперплоскости в евклидовом пространстве. (13.1-13.5)
18. Линейные функционалы. Сопряженное пространство. Линейные функционалы и гиперплоскости. (26.1-26.5)
19. Линейные операторы. Непрерывность и ограниченность. Норма линейного оператора. (27.1-27.3)
20. Матрицы линейного оператора в различных базисах. Эквивалентность и подобие матриц. (28.1, 28.3, 28.4)
21. Линейное пространство линейных операторов и пространство матриц. Произведение линейных операторов и его матрица. (28.1, 28.2)
22. Ядро и образ линейного оператора. Обратный оператор. (28.6, 28.7)
23. Собственные значения и собственные векторы. Диагонализуемые матрицы и операторы простой структуры. (29.1, 29.2, 29.7)
24. Характеристический многочлен. Существование собственных значений. (29.3-29.6)
25. Инвариантные подпространства. Сужение оператора. (28.5, 30.1-30.4)
26. Треугольная форма матрицы линейного оператора. Теорема Шура. (30.5, 30.6)

27. Сдвиги оператора, нильпотентность и обратимость их сужений. Корневые подпространства. (31.1-31.3)
28. Расщепление пространства в прямую сумму корневых подпространств. (31.4-31.5)
29. Инвариантные подпространства минимальной размерности. (32.1, 32.9)
30. Жорданова форма матрицы. Критерий подобия матриц. (32.1-32.6)
31. Матричные многочлены. Теорема Гамильтона–Кэли. Минимальный многочлен. (31.1, 31.6, 32.7)
32. Блочно диагональный аналог жордановой формы для вещественных матриц. (32.9-32.10)
33. Сопряженный оператор. Существование и единственность. Матрица сопряженного оператора. (38.1-38.3)
34. Нормальные операторы и нормальные матрицы. (33.1, 38.3)
35. Унитарные операторы и унитарные матрицы. (33.2, 38.3)
36. Эрмитовы операторы и эрмитовы матрицы. (33.4, 38.3-38.4)
37. Эрмитово разложение. Знакоопределенные операторы и матрицы. Квадратный корень из оператора. (33.5-33.7)
38. Блочно диагональная форма вещественной нормальной матрицы. (33.8)
39. Блочно диагональная форма ортогональной матрицы. (33.9)
40. Сингулярные числа и сингулярные векторы матрицы. Полярное разложение матрицы. (35.1-35.3)
41. Ортогональные дополнения ядра и образа линейного оператора (матрицы). Теорема и альтернатива Фредгольма. (28.8, 35.3)
42. Матричные нормы. Унитарно инвариантные нормы. (27.4-27.7)
43. Сингулярное разложение матрицы и обобщенные решения линейных систем. (35.3-35.5)
44. Наилучшие аппроксимации матриц на множестве матриц заданного ранга. Расстояние до множества вырожденных матриц. (35.6-35.7)
45. Квадратичные формы. Приведение к каноническому виду, приведение к главным осям. Конгруэнтность и эрмитова конгруэнтность. (36.1-36.3, 36.5, 36.7)
46. Закон инерции квадратичных форм. (36.3-36.4)
47. Одновременное приведение к каноническому виду пары квадратичных форм. (36.6)
48. Положительно (неотрицательно) определенные квадратичные формы. Критерий положительной определенности. (36.7-36.9)
49. Приведенные уравнения гиперповерхности в n -мерном пространстве. (36.10)
50. Вариационные (экстремальные) свойства собственных значений эрмитовой матрицы. (37.2)
51. Вариационные (экстремальные) свойства сингулярных чисел. (37.5)
52. Соотношения разделения. (37.1, 37.3, 37.6, 37.7)